(G,×) groupe d'unité e. E ensemble non vide.

I. Groupe opérant sur un ensemble

A. Définition

Def 1: (Gourdon) On dit que G **opère** sur E s'il existe une application: $\left| \begin{array}{l} G \times E \to E \\ (g,x) \mapsto g.x \end{array} \right.$ telle que:

$$\begin{cases} \forall (g_1,g_2) \in G \times G, \forall x \in E, \ \ g_1.g_2.x = g_1.(g_2.x) \\ \forall x \in E, \ \ e.x = x \end{cases}$$ (1)

Cette app° est appelée **action** ou **opération** de G sur E.

Ex.1: Opération par **translation à gauche**: (g,x) ↦ gx
G opère sur lui-même par translation à gauche, (Calais)(4)
Ex. 2: Opération par **conjugaison**: (g,x) ↦ gxg^{-1}
G opère sur lui-même par conjugaison, (Calais)
Ex. 3: S_E opère sur E: (σ,x) ↦ σ(x). En particulier, pour n∈ℕ*, S_n opère sur $[\![1;n]\!]$ ou sur tt ens. $X = \{x_1, \ldots x_n\}$ de cardinal n par: $(\sigma, x_i) \mapsto x_{\sigma(i)}$ (Calais)
Ex.4: E= $\mathbb{R}^2$ et G = O(2,ℝ) (3) opère sur E: $(A,x) \in G \times \mathbb{R}^2 \mapsto Ax \in \mathbb{R}^2$. (Grifone p.339)

B. Stabilisateur, orbite.

Def 2: Pour tout x∈E, $G_x = \{g \in G \,/\, g.x = x\}$ est un sous-groupe de G appelé **stabilisateur** de x.

Prop 1: La relation binaire ρ_G : (2)
$x \rho_G y \Leftrightarrow \exists g \in G, y = g.x$ est une **relation d'équivalence.**

Def 3: Pour tout x∈E, la classe d'équivalence de x modulo ρ_G est appelée **G-orbite de x** , et notée $\mathbf{\Omega_x}$.
$\Omega_x = \{g.x \,/\, g \in G\}$.

Ex. 1: Par translation, $G_x = \{e\}$ et $\Omega_x = G$.

Ex.2: Par conjugaison: $G_x = \{g \in G \,/\, gxg^{-1} = x\} = C_G(x)$, centralisateur de x dans G, et $\Omega_x = G$.

Ex. 3: Opération de S_n sur $[\![1;n]\!]$.
$\Omega_x = \{\sigma(x) \,/\, \sigma \in S_n\} = [\![1;n]\!]$.
$G_x = \{\sigma \in S_n \,/\, \sigma(x) = x\}$, permutations dont le support ne contient pas x.
Ex.4: Les différentes orbites sont les cercles de centre O et le point O. G_x est l'ensemble des isométries vectorielles laissant x invariant, soient les rélexions d'axe Vect(x).

II. Opération transitive, simplement transitive, fidèle. (Calais p.186-187).

Def 4: On dit que G opère **transitivement** sur E si E n'a qu'une seule G-Orbite, i.e. si:
$\forall (x,y) \in E \times E, \ \exists g \in G, \ \ y = g.x$.
On dit que G opère **simplement transitivement** sur E si:
$\forall (x,y) \in E \times E, \ \exists! g \in G, \ \ y = g.x$

Ex.1: L'opération de G sur lui-même par translation à gauche est transitive.
Ex.4: L'action de O(2,ℝ) sur $\mathbb{R}^2$ n'est pas transitive (intransitive) car deux vecteurs de norme différente ne peuvent être transformés l'un en l'autre par une transfo orthogonale.

Def 5: On dit que G opère **fidèlement** sur E si:
$$\left. \begin{cases} g \in G \\ \forall x \in E, g.x = x \end{cases} \right| \Rightarrow g = e$$ (6)

Ex.1-2: G opère **fidèlement** sur lui-même par translation à gauche, mais pas par conjugaison.

Def 6: (Grifone) G opère **librement** sur E si:
$$\left. \begin{cases} g \in G \\ \exists x \in E, g.x = x \end{cases} \right| \Rightarrow g = e$$

i.e. la seule transformation qui a des "pts fixes" est Id.

Ex. 4: L'action de O(2,ℝ) sur $\mathbb{R}^2$ est fidèle, mais n'est pas libre car la sym/ $\vec{D}$ laisse invariants les vect. de $\vec{D}$.

III. Stabilisateur, orbite (Calais p.179).

Th. 1: ∀x∈E, $Card(\Omega_x) = [G : G_x]$

Cor 1: Soient E ens. fini et G groupe opérant sur E.
Si $\{x_i\}_{1 \le i \le r}$ est une famille de représentants des G-orbites distinctes, alors $Card(E) = \sum_{i=1}^{r} [G : G_{x_i}]$.

Cor 2: Equation aux classes. Soit G un groupe fini considéré comme opérant sur lui-même par conjugaison. Si $\{x_i\}_{1 \le i \le r}$ est une famille de représentants des classes de conjugaison distinctes dans G: $o(G) = \sum_{i=1}^{r} [G : C_G(x_i)]$
où $C_G(x_i)$ note le centralisateur dans G de $\{x_i\}$. (5)

Remarque: Soit G opérant sur lui-même par conjugaison. x∈Z(G) ⇔ $\Omega_x = \{x\}$.

Th. 2: Soit G groupe fini de centre Z(G). Soit $\{x_i\}_{1 \le i \le k}$ une famille de représentants des classes de conjugaison distinctes et non réduites à un point de G. Alors:
$$o(G) = o(Z(G)) + \sum_{i=1}^{k} [G : C_G(x_i)].$$

Application: Si G est un groupe fini d'ordre p^n, avec p premier et n ∈ ℕ*, alors le **centre de G** n'est pas réduit à l'élément neutre.

Corollaire: Si p est un nombre premier, alors tout groupe fini d'ordre p^2 est **abélien.**

(7)

IV. Notes.

Rapport de jury 2011: *Quelques exemples sont ici indispensables pour donner à ces notions un peu de consistance : théorie des groupes, géométrie, combinatoire, algèbre linéaire. . .*

(1) "Remarquer l'analogie avec un ev sur un corps K, on a la même définition que pour la LCE.
Dans la structure d'espace vectoriel, le corps des scalaires opère sur l'ensemble des vecteurs par: $(\lambda,\vec{v}) \mapsto \lambda.\vec{v}$, et la définition d'un ev. assure que les conditions de la Def 1 sont bien remplies.

(2) Gourdon l'appelle "relation d'intransitivité".

(3) **Groupe orthogonal** de $\mathbb{R}^2$: Groupe des matrices orthogonales, ie tq ${}^tM = M^{-1}$.(Pté: det $= \pm 1$).
Par def°, un endomph orthogonal conserve le pdt scalaire (et donc les BON). On les appelle aussi isométries vectorielles. Cf leçon 117.
Classification des endomph orthog de E_2

$SO(E_2) = \{Rot_\theta ; \theta \in \mathbb{R}\}$.

$O(E_2) - SO(E_2) = \{\text{Réf}_D ; D \text{ droite vectorielle de E}\}$

(4) On prend toujours "à gauche", parce qu'à droite il faut écrire xg^{-1} pour avoir les bonnes relations.

(5) **Centralisateur** d'une partie X d'un groupe: ens. des éléments du groupe qui commutent avec tout élément de X.

(6) Au lieu de "fidèle", Grifone dit "effective".
L'opération est fidèle ssi le morphisme:

$$g \mapsto \gamma_g : \begin{array}{l} E \to E \\ x \mapsto g.x \end{array} \text{ est injectif.}$$

Une application en serait le théorème de Cayley: Tout groupe G est isomorphe à un sg de S_G (groupe des permutations de G), mais je n'ai pas de sources.

(7) Autre application ds Gourdon: Th. de Cauchy. Si G fini et p premier divise o(G), le nbre de sol° ds G de l'éq° x^p=e est un multiple de p.

V. Rabe, révisions.

<u>**Sous le coude**</u>: Dans Ladegaillerie p. 14 :
On peut définir un **espace affine** en termes d'opération de groupes:
"Une structure d'e.a. de direction $\vec{E}$ (ev sur un coprs K) sur un ensemble E est la donnée d'une opération fidèlement transitive du groupe additif de $\vec{E}$ sur E.

<u>**Relations d'équivalences, groupes quotients, dg distingués.**</u>
Une relation d'équivalence R dans un groupe (noté multiplicativement) est dite compatible avec la loi ssi:
∀x,y,x', y' ∈ G, (xRy et x'Ry') ⇒ xx'Ryy'.
On note $_H R$ la relation d'équivalence à gauche modulo H
On a: x $_H R$ y ⇔ $x^{-1}y$ ∈ H ⇔ y ∈ xH.
Les seules relations d'équivalence compatibles avec la loi d'un groupe sont les R = $_H R$ = R_H. (G n'a pas besoin d'être abélien, il suffit que H soit le noyau d'un morphisme pour que les classes de $_H R$ et R_H coïncident.
Application: Le noyau de l'action de G sur $(G/H)_g$ est $\bigcap_{x \in G} xHx^{-1}$, et c'est le plus grand sg de G, normal dans G et contenu dans H.
Application: Si G est un groupe fini d'ordre n>1, contenant un sg propre H tq $[G:H] = k > 1$, et si n ne divise pas k!, alors G n'est pas simple.
(p.136)Un **sg normal** (ou **distingué**) est un H<G tq $_H R$ et R_H . Alors G/H est un groupe, muni d'une loi induite par celle de G. On note $H \triangleleft G$.
Caractérisation usuelle : ∀ h ∈ H, ∀ g ∈ G, ghg^{-1} ∈ H.
Un groupe G est dit **simple** s'il n'est pas réduit à {e} et si ses seuls sg normaux sont {e} et G.
Ex. 3: Si H<G, notant $(G/H)_g$ l'ensemble des classes à gauche de G modulo H, G opère sur $(G/H)_g$ par translations à gauche. (g,xH) ∈ G×$(G/H)_g$ ↦ gxH

Application: $Int(G) \simeq \dfrac{G}{Z(G)}$.

<u>**Automorphismes intérieurs:**</u>
On note $Int(G) = \left\{ \sigma_g : \begin{array}{l} G \to G \\ x \mapsto gxg^{-1} \end{array} \middle| g \in G \right\}$ le groupe des **automorphismes intérieurs** de G.